SESSION 1998 **A001**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES 1

DURÉE : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire N°86-228 du 28 juillet 1986.

Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction des copies.

PROBLEME

Si n est un entier naturel, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On note $m_{i,j}$, l'élément ligne i et colonne j d'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$.
On note Id la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.
On appelle matrice semi-magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$ vérifiant $\forall i \in [1,n]$, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M)$ et $\forall j \in [1,n]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M)$.

On appelle trace de M le réel, noté $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$. On note SM_n l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n.

On appelle matrice magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, ayant les propriétés suivantes :

M est semi-magique et $\sigma(M) = Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$ et $\sigma'(M) = \sum_{i\in[1,n],j\in[1,n],i+j=n+1} m_{i,j}$.

On note MG_n l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

Si M est un élément de $M_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$, la matrice transposée de M.
Un vecteur colonne X, non nul sera dit vecteur propre de M associé à la valeur propre λ si et seulement si $MX = \lambda X$.

I. Montrer que M est semi-magique si et seulement si $V = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ (l'élément ligne i de V est 1.) est vecteur propre commun de M et ${}^tM$, associé à la même valeur propre.

II. Déduire du résultat précédent que l'ensemble des matrices semi-magiques est une $\mathbb{R}$ algèbre, incluse dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que MG_n est un espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

III. On désigne par E la matrice à coefficients réels telle que $\forall i \in [1,n], \forall j \in [1,n]$ $e_{i,j} = 1$.
Montrer que E est magique . Montrer que: $\forall p \geq 1$, $E^p = n^{p-1}E$.

IV. Montrer que: pour toute matrice semi-magique M de $M_n(\mathbb{R})$ on a :
$EM = \sigma(M)E = ME$.

V. Dans cette question, on impose n=3 .

1. Montrer que toute matrice de MG_3 est la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique et que cette décomposition est unique.

2. Construire toutes les matrices magiques antisymétriques de MG_3.

3. Construire toutes les matrices magiques symétriques de MG_3 de trace nulle.
En remarquant que $M - \frac{1}{3}Tr(M)E$ a une trace nulle, en déduire toutes les matrices magiques symétriques de MG_3. Donner une base de l'espace des matrices magiques de MG_3.

4. On se propose de démontrer que si M est magique de MG_3, alors pour tout entier p impair, M^p est magique.

4.1. Soit M, une matrice magique de trace nulle.

On admettra le résultat suivant qu'on ne demande pas de démontrer : il existe un polynôme P du troisième degré $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ *tel que*
$P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = 0$
et de plus, le réel a est égal à $-Tr(M)$;
Montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ entraîne que M est inversible et que la relation démontrée en IV conduit à une contradiction.

En déduire l'existence d'un réel λ tel que $M^3 = \lambda M$ et que pour tout entier p, impair M^p est magique.

4.2 Soit M une matrice magique de MG_3; On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}Tr(M)E$.

Calculer M^p et montrer que pour tout p impair, M^p est magique.

V.I. Dans cette question, on impose n=4 et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Vérifier $A^2 = A + 2Id$.
2. Montrer qu'il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que $A^p = a_pA + b_pId$.
3. Démontrer que pour tout $p \geq 2$, A^p ne peut pas être magique.

EXERCICE I

Soit a et b deux réels distincts, on désigne par F l'espace vectoriel des fonctions de [a, b] dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞.

1. Montrer que l'application $\varphi : F \times F \to R$ définie par : $\varphi(f,g) = < f,g > = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire euclidien sur F.

2. On impose $a = 0$ et $b = 2\pi$. Calculer $\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)dt$ pour p et q entiers naturels;
En déduire que la famille $G = \left\{ t \xrightarrow{f_i} f_i(t) = \sin(it), i \in [1,n] \right\}$ est libre dans F.

3. On impose $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$. On désigne par Vect (G) le sous espace vectoriel engendré par G.
Soit $f = \sum_{i=1}^{i=n} x_i f_i$ un élément de F et $g = \sum_{i=1}^{i=n} y_i f_i$ un autre élément de F.

Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre n telle que :

$$\varphi(f,g) = < f,g > = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)dt = {}^tXAY \text{ avec}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad a_{i,j} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_i(t)f_j(t)dt .$$

La famille G est-elle une famille orthogonale pour le produit scalaire φ ?

4. En faisant un changement de base convenable dans l'espace Vect (G), montrer qu'il existe une matrice inversible P qu'on ne demande pas d'expliciter telle que ${}^tPAP = Id$ où Id désigne la matrice identité. En déduire que la matrice carrée d'ordre n

$A = \left[a_{i,j} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(it)\sin(jt)dt \right]$ a un déterminant strictement positif.

EXERCICE II

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, munis de sa structure euclidienne et orienté par le choix d'une base.
On rappelle que si r est une rotation de E, alors
pour tout couple de vecteurs $(x,y) \in E^2$, on a $r(x \wedge y) = r(x) \wedge r(y)$.
On rappelle que si r est une rotation d'axe orienté par ω unitaire et d'angle θ, alors pour tout vecteur x orthogonal à ω, on a $r(x) = x\cos(\theta) + \sin(\theta)\ \omega \wedge x$.

On considère l'endomorphisme $r \circ R \circ r^{-1}$ de E où R est une rotation d'axe orienté par Ω unitaire et d'angle θ et r est une rotation d'axe orienté par ω unitaire de E. On se propose de montrer que $r \circ R \circ r^{-1}$ est une rotation d'axe orienté par $r(\Omega)$ et d'angle θ.

1. Montrer que $r \circ R \circ r^{-1}$ est une rotation de E.

2. Montrer que $r(\Omega)$ est invariant par $r \circ R \circ r^{-1}$ .On désigne par φ l'angle de cette rotation .

3. Si $\Omega = \omega$, préciser l'angle et l'axe de la rotation $r \circ R \circ r^{-1}$.

4. On impose $\Omega \wedge \omega \neq 0$.

   4.1 Montrer que si x est orthogonal à $r(\Omega)$ on a :
   $r \circ R \circ r^{-1}(x) = x\cos(\theta) + \sin(\theta)\ r(\Omega) \wedge x$.

   4.2 Montrer que pour tout vecteur x orthogonal à $r(\Omega)$ on a :
   $r \circ R \circ r^{-1}(x) = x\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\ r(\Omega) \wedge x$.

   4.3 En déduire $\theta = \varphi$ et conclure.